***Лекция 14***

**Колебания системы с двумя степенями свободы.**

**Квадратичная форма потенциальной энергии. Условие устойчивости положения равновесия.**

 Рассматриваем систему с 2-мя степенями свободы и обобщенными координатами q1, q2. Все силы потенциальны, значит существует функция П (q1, q2). Система имеет положение равновесия, в котором выбираем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии

П (0,0) = 0. По условиям равновесия:

$$\frac{∂П}{∂q\_{1}}\left(0,0\right)=0 \frac{∂П}{∂q\_{2}}\left(0,0\right)=0 $$

Разложим П в ряд Маклорена в нуле:

$$П\left(q\_{1}q\_{2}\right)=П\left(0,0\right)+\frac{∂П}{∂q\_{1}}\left(0,0\right)q\_{1}+\frac{∂П}{∂q\_{2}}\left(0,0\right)q\_{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{∂^{2}П}{∂q\_{1}^{2}}\left(0,0\right)q\_{1}^{2}+2\frac{∂^{2}П}{∂q\_{1}^{}∂q\_{2}}\left(0,0\right)q\_{1}q\_{2}+\frac{∂^{2}П}{∂q\_{2}^{2}}\left(0,0\right)q\_{2}^{2}\right)+…$$

Ввиду выбора нулевого уровня П и условий равновесия первым ненулевым слагаемым окажется квадратичная форма

$$П\left(q\_{1}q\_{2}\right)=\frac{1}{2}\left(с\_{11}q\_{1}^{2}+2с\_{12}q\_{1}q\_{2}+с\_{22}q\_{2}^{2}\right)$$

Здесь обозначены коэффициенты жесткости системы:

 $с\_{11}=\frac{∂^{2}П}{∂q\_{1}^{2}}\left(0,0\right) с\_{12}=\frac{∂^{2}П}{∂q\_{1}∂q\_{2}}\left(0,0\right) с\_{22}=\frac{∂^{2}П}{∂q\_{2}^{2}}\left(0,0\right)$

 Система называется ***линейной по П***, если члены разложения, следующие за квадратичной формой, отсутствуют. Если система не линейна, то ее «линеаризуют», рассматривая малые движения системы около положения равновесия. После линеаризации потенциальная энергия практически является квадратичной формой.

 Коэффициенты жесткости образуют симметричную матрицу жесткости:

$$C=\left(\begin{matrix}с\_{11}&с\_{12}\\с\_{12}&с\_{22}\end{matrix}\right)$$

при этом с12 = с21, т.к. порядок взятия смешанной производной не имеет значения.

 Колебания возникают только около положения устойчивого равновесия. Условием устойчивости положения равновесия по Ляпунову является наличие min П в положении равновесия (в нуле). Поскольку П (0,0) = 0, то это значит, что в окрестности нуля П должно быть положительно определенной функцией.

Из математики известно, что условием положительной определенности квадратичной формы в окрестности нуля является критерий Сильвестра: *главные диагональные миноры матрицы жесткости должны быть положительны:*

с11>0 |C|=c11c22-c122 > 0

**Квадратичная форма кинетической энергии.**

$$T=\frac{1}{2}\sum\_{}^{}m\_{k}V\_{k}^{2}$$

$V\_{k}=\dot{r}\_{k}=\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{1}}\dot{q}\_{1}+\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{2}}\dot{q}\_{2}; \frac{∂r\_{k}}{∂q\_{1}}\left(q\_{1}q\_{2}\right); \frac{∂r\_{k}}{∂q\_{2}}(q\_{1}q\_{2})$

Возводим vk в квадрат

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{q}\_{1}^{2}\sum\_{}^{}m\_{k}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{1}}\right)^{2}+2\dot{q}\_{1}\dot{q}\_{2}\sum\_{}^{}m\_{k}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{1}}\right)\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{2}}\right)+\dot{q}\_{2}^{2}\sum\_{}^{}m\_{k}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{2}}\right)^{2}^{}\right)$$

Таким образом, Т является квадратичной формой обобщенных скоростей с коэффициентами – в общем случае функциями координат:

$$a\_{11}=\sum\_{}^{}m\_{k}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{1}}\right)^{2}; a\_{12}=\sum\_{}^{}m\_{k}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{1}}\right)\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{2}}\right) a\_{22}=\sum\_{}^{}m\_{k}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{2}}\right)^{2}^{} $$

$$T=\frac{1}{2}(a\_{11}\dot{q}\_{1}^{2}+2a\_{12}\dot{q}\_{1}\dot{q}\_{2}+a\_{22}\dot{q}\_{2}^{2})$$

Cистема называется ***линейной по Т***, если эти функции постоянны. Если система не линейна, то ее линеаризуют, рассматривая малые движения системы. Функции раскладывают в ряд Маклорена и оставляют только первый член разложения

a11=a11(0,0) a121=a12(0,0) a22=a22(0,0)

Это значит, что получить искомую форму Т можно, вычислив Т в нуле.

Поскольку кинетическая энергия положительна, то для ее коэффициентов всегда выполняется критерий Сильвестра:

a11>0 a11a22-a122>0

**Дифференциальные уравнения движения системы. Главные колебания.**

Подставив в уравнения Лагранжа системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂T}{∂\dot{q}\_{1}}\right)-\frac{∂T}{∂q\_{1}}=-\frac{∂П}{∂q\_{1}} \frac{d}{dt}\left(\frac{∂T}{∂\dot{q}\_{2}}\right)-\frac{∂T}{∂q\_{2}}=-\frac{∂П}{∂q\_{2}} $$

формы Т и П, получим ***дифференциальные уравнения колебаний системы***:

$$a\_{11}\ddot{q}\_{1}+a\_{12}\ddot{q}\_{2}+c\_{11}q\_{1}+c\_{12}q\_{2}=0$$

$$a\_{21}\ddot{q}\_{1}+a\_{22}\ddot{q}\_{2}+c\_{21}q\_{1}+c\_{22}q\_{2}=0$$

Решение уравнений ищем в виде периодических синфазных функций с разными амплитудами:

 $q\_{1}=ASin\left(kt+∝\right) q\_{2}=BSin\left(kt+∝\right) $

Подставив эти решения в дифференциальные уравнения, после сокращения на $Sin\left(kt+∝\right)$, получим однородные алгебраические уравнения относительно амплитуд А и В, с неизвестным параметром k – собственной частотой.

$$A(c\_{11}-a\_{11}k^{2})+B(c\_{12}-a\_{12}k^{2})=0$$

$$A(c\_{12}-a\_{12}k^{2})+B(c\_{22}-a\_{22}k^{2})=0$$

Как известно, нетривиальное (ненулевое) решение таких уравнений существует, если определитель матрицы системы равен нулю:

$$(c\_{11}-a\_{11}k^{2})(c\_{22}-a\_{22}k^{2})-(c\_{12}-a\_{12}k^{2})^{2}=0$$

Это дает биквадратное «частотное уравнение» относительно собственной частоты k

$$y\left(k^{2}\right)=0$$

левая часть которого имеет вид:

$$y\left(k^{2}\right)=k^{4}\left(a\_{11}a\_{22}-a\_{22}^{2}\right)+k^{2}(2c\_{12}a\_{12}-a\_{11}c\_{22}-a\_{22}c\_{11})+( c\_{11}c\_{22}-c\_{12}^{2})$$

Оно имеет два корня. Нас устраивает только положительное вещественное решение, иначе решение не будет колебательным. Покажем, что при устойчивом положении равновесия они таковыми и являются.

 Построим график $y\left(k^{2}\right)(Рис.1).$ $y\left(0\right)=0$ ввиду выполнения условия устойчивости положения равновесия $c\_{11}c\_{22}-c\_{12}^{2}>0$. $y\left(\infty \right)>0 $ ввиду того, что $a\_{11}a\_{22}-a\_{22}^{2}>0$

$$k\_{2}^{2}$$

$$k\_{1}^{2}$$

$$k^{\*}\_{2}^{2}$$

$$k^{\*}\_{1}^{2}$$

$$k^{2}$$

$$y$$

В то же время, при значениях частоты, называемых «***парциальными частотами***»

$k^{\*}\_{1}^{2}=\frac{c\_{11}}{a\_{11}} k^{\*}\_{2}^{2}=\frac{c\_{22}}{a\_{22}}$

Рис.1

$$y\left(k^{\*}\_{1}^{2}\right)<0 y\left(k^{\*}\_{2}^{2}\right)<0$$

 что вытекает непосредственно из частотного уравнения, поскольку

$$c\_{11}-a\_{11}k^{\*}\_{1}^{2}^{}=0 c\_{22}-a\_{22}k^{\*}\_{2}^{2}^{}=0$$

 Таким образом, частотное уравнение имеет два вещественных положительных корня $k\_{1}^{2}$ и $k\_{2}^{2}$, если положение равновесия устойчиво.

Частоты $k\_{1}$и $k\_{2}$называются ***собственными частотами системы.***

Вернемся к уравнениям амплитуд. Они становятся зависимыми для собственных частот, поэтому найти из них и А и В невозможно. Можно найти только их отношения – коэффициенты формы для каждой частоты из любого из уравнений.

Например, из первого уравнения

$$A(c\_{11}-a\_{11}k^{2})+B(c\_{12}-a\_{12}k^{2})=0$$

для каждой из собственных частот находим

$$μ\_{1}=\frac{B\_{1}}{A\_{1}}=-\frac{c\_{11}-a\_{11}k\_{1}^{2}}{c\_{12}-a\_{12}k\_{1}^{2}} μ\_{2}=\frac{B\_{2}}{A\_{2}}=-\frac{c\_{11}-a\_{11}k\_{2}^{2}}{c\_{12}-a\_{12}k\_{2}^{2}}$$

Теперь закон движения системы получает вид:

$$q\_{1}=A\_{1}Sin\left(k\_{1}t+∝\_{1}\right)+A\_{2}Sin\left(k\_{2}t+∝\_{2}\right)$$

$$q\_{2}=μ\_{1}A\_{1}Sin\left(k\_{2}t+∝\_{1}\right)+μ\_{2}A\_{2}Sin\left(k\_{2}t+∝\_{2}\right)$$

Видим, что система совершает 2 ***главных колебания*** с частотами *k1* и *k2*. В решении есть четыре произвольных постоянных

$A\_{1}$; $A\_{2}$; $∝\_{1}; ∝\_{2}$

которые следует найти из начальных условий

$$t=0: q\_{1}=q\_{10}; q\_{2}=q\_{20} \dot{q}\_{1}=\dot{q}\_{10} \dot{q}\_{2}=\dot{q}\_{20}$$

***Замечание о нормальных координатах***:

Можно показать, что для любой системы существуют обобщенные координаты, называемые ***нормальными***, в которых отсутствуют коэффициенты квадратичных форм

$$a\_{12}=0 с\_{12}=0$$

В нормальных координатах уравнения «разделяются»:

l

l

mg

mg

$$φ$$

$$θ$$

Рис.2

$$a\_{11}\ddot{q}\_{1}+c\_{11}q\_{1}=0$$

$$a\_{22}\ddot{q}\_{2}+c\_{22}q\_{2}=0$$

***Пример*** ***(колебания двойного математического маятника)***:

 Рассмотрим движение двойного математического маятника (Рис.2). Для простоты, положим, что их массы m и длины l одинаковы. Уравнения Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂T}{∂\dot{φ}}\right)-\frac{∂T}{∂φ}=-\frac{∂П}{∂φ} \frac{d}{dt}\left(\frac{∂T}{∂\dot{θ}}\right)-\frac{∂T}{∂θ}=-\frac{∂П}{∂θ}$$

Квадратичную форму кинетической энергии найдем, вычислив Т в момент прохождения системой положения равновесия. В положении равновесия скорость нижней массы равна $l\dot{\dot{φ}+l\dot{ϑ}}$

$$T=\frac{m}{2}l^{2}\dot{φ}^{2}+\frac{m}{2}(l\dot{\dot{φ}+l\dot{ϑ})}^{2}=ml^{2}\dot{φ}^{2}+ml^{2}\dot{φ}\dot{ϑ}+\frac{m}{2}l^{2}\dot{ϑ}^{2}=\frac{1}{2}(a\_{11}\dot{q}\_{1}^{2}+2a\_{12}\dot{q}\_{1}\dot{q}\_{2}+a\_{22}\dot{q}\_{2}^{2})$$

Таким образом система линейна по Т

$$a\_{11}=2ml^{2} a\_{12}=a\_{22}=ml^{2} $$

Потенциальная энергия системы

$$П=mgl\left(1-Cosφ\right)+mgl\left[\left(1-Cosφ\right)+\left(1-Cosθ\right)\right]$$

Система не линейна по П, поэтому нужно рассматривать малые движения около положения равновесия. Теперь

$$П=mglφ^{2}+mgl\frac{θ^{2}}{2}=\frac{1}{2}\left(с\_{11}φ^{2}+2с\_{12}φθ+с\_{22}θ^{2}\right)$$

Отсюда

$$с\_{11}=2mgl с\_{12}=0 с\_{22}=mgl$$

Напишем частотное уравнение:

$$k^{4}\left(2m^{2}l^{4}-m^{2}l^{4}\right)+k^{2}\left(-2m^{2}l^{3}g-2m^{2}l^{3}g\right)+2\left(mgl\right)^{2}=m^{2}l^{4}k^{4}-4m^{2}l^{3}gk^{2}+2\left(mgl\right)^{2}=0$$

Сократив на $m^{2}l^{4},$ получим

$$k^{4}-4\frac{g}{l}k^{2}+2\left(\frac{g}{l}\right)^{2}=0$$

Решения этого уравнения дают собственные частоты

$$k^{2}\_{1,2}=2\frac{g}{l}\pm \sqrt{\left(2\frac{g}{l}\right)^{2}-2\left(\frac{g}{l}\right)^{2}}=\frac{g}{l}(2\pm \sqrt{2})$$

Находим коэффициенты формы. Для $k^{2}\_{1}=\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})$

$$μ\_{1}=-\frac{c\_{11}-a\_{11}k\_{1}^{2}}{c\_{12}-a\_{12}k\_{1}^{2}}=-\frac{2mgl-2ml^{2}\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})^{}}{-ml^{2}\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})^{}}=-\frac{2\sqrt{2}+2}{2+\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}+4-4-2\sqrt{2}}{4-2}=-\sqrt{2}$$

Для второй частоты получим

$$μ\_{2}=\sqrt{2}$$

Положительный коэффициент формы означает, что маятники будут колебаться синфазно (Рис.3 а). Отрицательный коэффициент формы означает, что маятники будут колебаться в противофазе (Рис.3 б). Характерно, что бóльшая частота соответствует отрицательному коэффициенту формы.

Рис.3

а

б

Система будет колебаться по одной из форм, если маятники отклонить в пропорции $μ\_{1}$ или $μ\_{2} ,$как на Рис.3 (а или б) и отпустить без начальной скорости. При произвольных начальных условиях будут иметь место обе формы колебаний.